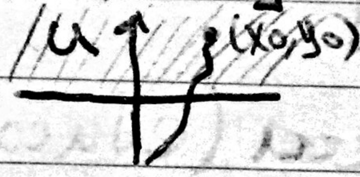
4-11-15

Δεύτερος τρόπος επίλυσης (μέθοδος Χαρακτηριστικών)

(*) $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$, $\forall (x,y)\in U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό.

[με $a^2(x,y)+b^2(x,y)\neq 0$, $\forall (x,y)\in U$]

Μέθοδος: Έστω, $(x_0,y_0)\in U$ (π.χ.

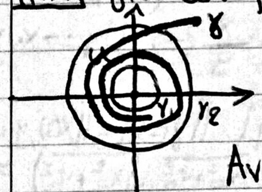


, δηλ. $U=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : y>0\}$)

Θέλουμε να βρούμε την λεγόμενη χαρακτηριστική καμπύλη $\gamma(s)=(x(s),y(s))$ με $\gamma(0)=(x_0,y_0)$, $|s|<r$, $r>0$ έτσι ώστε η γ να τέμνει το σύνορο ∂U, όπου θα έχουμε δεδομένες συνοριακές (αν $y=t$: αρχικές) συνθήκες και κατά μήκος της γ να μεταφέρεται (δηλ. να μπορεί να ~~~~ χρησιμοποιηθεί για υπολογισμούς) η πληροφορία απ' το $\partial\mathcal{U}$ μέσω της $Z(s) := u(\gamma(s))$ }

<u>Ερώτηση</u>: Τέμνει η γ το $\partial\mathcal{U}$?
<u>Απάντηση</u>: Εξαρτάται από την εξίσωση (δηλ. από τα $a(x,y)$, $b(x,y)$) και την γεωμετρία (δηλ. τη μορφή) του $\mathcal{U}$

$\boxed{\text{π.χ}}$ για τον ρόλο της μορφής του $\mathcal{U}$.



$\mathcal{U} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<r_1^2<x^2+y^2<r_2^2\}$
και έστω οι συνοριακές τιμές δίνονται σ' ένα $\Gamma\subset\partial\mathcal{U}$.
Αν οι καμπύλες είναι της μορφής
$\gamma(\theta) = (r_1+e^{-\theta})(\cos\theta,\sin\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$. αυτές δεν θα αγγίξουν ποτέ τον κύκλο ακτίνας r_1
.

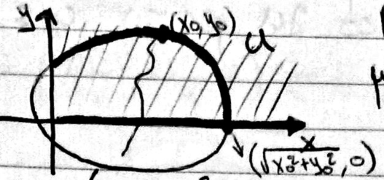
Με την προηγούμενη μέθοδο έχουμε $\dot{Z}(s) = \nabla u(\gamma(s))\cdot\dot{\gamma}(s) = u_x \underbrace{\dot{x}}_{=a} + u_y \underbrace{\dot{y}}_{=b}$ $\underline{(*)}$

$= d(x,y) - c(x,y)Z(s)$

Δηλαδή, έχουμε
$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \\ \dot{z} = d(x,y) - c(x,y) \end{cases}$$
όπου στη γραμμική περίπτωση οι δύο πρώτες είναι ένα κλειστό σύστημα.

ΑΣΚ

$$\begin{cases} xy\,u_x - x^2 u_y - y u = xy, & \text{στο } U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0,\ y>0\} \\ u(x,0)=g(x), \text{ σ το } \Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g\in C^1(\Gamma) \end{cases}$$



Βρείτε τη λύση ΠΣΤ (προβλήματος συνοριακών τιμών)

Λύση (μέθοδος χαρακτηριστικών)

(Στην εξέταση θα πρέπει να γράφω την μέθοδο...)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(s) = x(s)y(s), & x(0)=x_0 \quad (i) \\ \dot{y}(s) = -x^2(s), & y(0)=y_0 \quad (ii) \\ \dot{z}(s) = x(s)y(s)+y(s)z(s), & z(0)=u(x_0,y_0) \quad (iii) \end{cases}$$

Από (i),(ii) $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=xy \\ \dot{y}=-x^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{xy} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y\,dy = -x\,dx$

$\Rightarrow y^2 = -x^2 + c \Rightarrow x^2+y^2 = c \ (c\geq 0)$, δηλ. $\|\gamma(s)\|^2 = \|(x(s),y(s))\|^2 = c$

$\Rightarrow x^2+y^2 = x_0^2+y_0^2 \Rightarrow y(x) = \sqrt{x_0^2+y_0^2-x^2}$, $x\in\left(-\sqrt{x_0^2+y_0^2}, \sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)$

Άρα, βρήκαμε ποιες είναι οι χαρακτηριστικές καμπύλες. Πρέπει να μπορέσουμε να βρούμε και το $z(s)$

Έχουμε: $\frac{dx}{ds} = xy$, $\frac{dz}{ds} = y(x+z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{z}{x} \Rightarrow z(x) = x\ln x + x\ln c$, $\underbrace{c>0}_{\tilde{c}=\ln c}$ ①

Συνεπώς, $z(x) = u(x,y(x)) \Rightarrow z(x_0) = u(x_0,y_0)$ ②

Έχουμε, $z\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) = u\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2},0\right)$ ③

①,② $\Rightarrow$ βρίσκουμε την σταθερά $\tilde{c}=\ln c$, ως

$z(x_0) = x_0(\ln x_0 + \ln c) = u(x_0,y_0) \Rightarrow \ln c = \frac{u(x_0,y_0)-x_0\ln x_0}{x_0} \Rightarrow$

$\overset{①}{\Rightarrow} z(x) = x\left(\ln x + \frac{u(x_0,y_0)-x_0\ln x_0}{x_0}\right)$, $\forall x\in\left(0,\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right]$

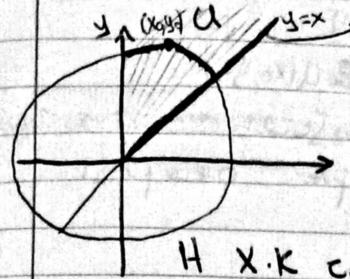
$\overset{③}{\Rightarrow} z\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) = g\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) = \sqrt{x_0^2+y_0^2}\left(\ln\sqrt{x_0^2+y_0^2} + \frac{u(x_0,y_0)-x_0\ln x_0}{x_0}\right)$

Λύνοντας ως προς $u(x_0,y_0)$ για το τυχαίο $(x_0,y_0)\in U$.

έχουμε την λύση του ΠΕΤ

ΑΣΚ

$$\begin{cases} xyu_x - x^2u_y - yu = xy, & \text{στο } U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y>x>0\} \\ u(x,x)=x, & x>0 \end{cases}$$



Όπως πριν βλέπουμε ότι οι χ.κ είναι $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$ και έχουμε $Z(x)=x\left(\ln x+\frac{z_0-x_0\ln x_0}{x_0}\right)$, με $z_0=u(x_0,y_0)$ $\oplus$

Η χ.κ τέμνει την ευθεία $y=x$, όταν $y(s)=x(s)$

όπου $x^2(s)+y^2(s)=x_0^2+y_0^2$, $\forall s \Rightarrow x(\bar{s})=y(\bar{s})=\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}$

$$\Rightarrow Z\left(\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}\right)=u\left(\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}},\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}\right)\ [Z(x)=u(x,y(x))]$$

$$=\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}\overset{\oplus}{=}\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}\left(\ln\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}+\frac{u(x_0,y_0)-x_0\ln x_0}{x_0}\right)$$

Λύνοντας ως προς $u(x_0,y_0)$ έχουμε την λύση του ΠΕΤ

Μη γραμμικές (ΜΔΕ $1^{ης}$ τάξης δύο μεταβλητών)

Γενική: $F(\underbrace{u_x}_{=p},\underbrace{u_y}_{=q},\underbrace{u}_{=z},x,y)=0$, $\forall (x,y)\in U\subset\mathbb{R}^2$ ανοικτό, $u\in C^1(U)$

$F\in C^1(\mathbb{R}^3\times U)$

Οι δύο πιο απλές περιπτώσεις:

ημιγραμμική: $F(p,q,z,x,y)=a(x,y)p+b(x,y)q-d(x,y,z)$

σχεδόν γραμμική: $F(p,q,z,x,y)=a(x,y,z)p+b(x,y,z)q-d(x,y,z)$

Ένα ΠΕΤ για μια μη γραμμική εξίσωση μπορεί να λυθεί με την μέθοδο των χαρακτηριστικών

δηλ. θέτουμε $\gamma(s):=(x(s),y(s))$, $\gamma(0)=(x_0,y_0)\in U$, $|s|<r$, $\gamma(s)\in U$

$Z(s):=u(\gamma(s))$, $Z(0)=u(x_0,y_0)$

~~Επομένως~~ $\Rightarrow \dot z(s)=\nabla u(\gamma(s))\cdot\dot\gamma(s)=u_x(\gamma(s))\underbrace{\dot x(s)}_{=a(x(s),y(s),z(s))}+u_y(\gamma(s))\underbrace{\dot y(s)}_{=b(x(s),y(s),z(s))}=$

(Αφού $\gamma(s)\in U$ και $u(\gamma(s))=z(s)$ ικανοποιεί την εξίσωση)

$= d(x(s),y(s),z(s))$

Δηλαδή,
$$\begin{cases}\dot x(s)=a(x(s),y(s),z(s)), & x(0)=x_0\\ \dot y(s)=b(x(s),y(s),z(s)), & y(0)=y_0\\ \dot z(s)=d(x(s),y(s),z(s)), & z(0)=u(x_0,y_0)\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι εδώ δεν διαχωρίζεται στο υποσύστημα $\begin{cases}\dot x=a\\ \dot y=b\end{cases}$, δηλ. πρέπει να τις λύσουμε "όλες μαζί"

ΑΣΚ

$$\begin{cases}\ln(y+u)\,u_x+u_y=-1, & U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}\\ u(x,0)=\underbrace{g(x)}_{>0}, & \Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}\end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases}(a)\ \dot x=\ln(y+z)\\ (b)\ \dot y=1\\ \dot z=-1\end{cases} \Rightarrow y(s)=s+y_0,\ z(s)=-s+u(x_0,y_0)=-y(s)+y_0+u(x_0,y_0)\quad (*)$$

και (a),(b) $\Rightarrow \dfrac{dx}{dy}=\ln(y+z)\overset{(*)}{=}\ln(y_0+u(x_0,y_0))$

$\Rightarrow x(y)=\ln(y_0+u(x_0,y_0))\,y+c$, όπου $x_0=\ln(y_0+u(x_0,y_0))y_0+c$

$\Rightarrow x=\ln(y_0+u(x_0,y_0))\,y+x_0-\ln(y_0+u(x_0,y_0))\,y_0$ (**)

Αφού γνωρίζουμε την τιμή της u, όταν $y=0$ εξετάζουμε για ποια x η χαρακτ. καμπύλη (**) περνάει από το Γ

$\Rightarrow \bar x=x_0-\ln(y_0+u(x_0,y_0))\,y_0$

$\Rightarrow \underbrace{u(\bar x,0)}_{\overset{(*)}{=}u(x_0,y_0)+y_0}=g(\bar x)=g(x_0-\ln(y_0+u(x_0,y_0))\,y_0)$

Δηλαδή, η λύση του ΠΣΤ στο $(x,y)\in U$ είναι η
$u(x,y)+y=g(x-\ln(y+u(x,y))\,y)$, η οποία δίνεται εδώ σε πεπλεγμένη μορφή.

Καλό είναι να δούμε αν η λύση επαληθεύει το ΠΣΤ

$u(x,0)=g(x)$ ισχύει

$$u_x = g'(\dots)\left(1-\frac{y}{u+y}u_x\right) \iff \left(1+\frac{g'(\dots)y}{u+y}\right)u_x = g'(\dots)$$

$$\Rightarrow u_x = \frac{g'(\dots)}{1+\frac{g'(\dots)y}{u+y}}$$

$$\boxed{\text{ΑΣΚ}: \begin{cases} (y+2xu)u_x-(x+2yu)u_y = \dfrac{x^2-y^2}{2}, & U=\{y>0\} \\ u(x,0)=x, & \text{στο } \partial U \end{cases}}$$